

БИОЛОГИЯ

УДК 630*231

**В.А. Усольцев^{1,2}, М.П. Воронов¹, С.О.Р. Шобейри³, Дж.А. Дар⁴, К.В. Колчин¹,
В.П. Часовских¹, Е.В. Марковская¹**

¹ Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург

² Ботанический сад УрО РАН, г. Екатеринбург

³ Nanjing Forestry University, Nanjing Shi, Jiangsu Sheng, China

⁴ Biodiversity Conservation Lab., Department of Botany, Sagar, M.P., India

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРАДИЦИОННЫХ И АДДИТИВНЫХ
МОДЕЛЕЙ ФРАКЦИОННОГО СОСТАВА БИОМАССЫ ДЕРЕВЬЕВ И
ДРЕВОСТОЕВ (НА ПРИМЕРЕ РОДОВ *Picea* L. И *Abies* Mill.)**



Ключевые слова: *Picea* L., *Abies* Mill., биосферная роль лесов, фитомасса деревьев и древостоев, аллометрические модели, пробные площади, биологическая продуктивность, аддитивность уравнений, трансконтинентальные таблицы фитомассы.

Впервые в русскоязычной литературе выполнен сравнительный анализ адекватности традиционных (независимых) и аддитивных систем уравнений фитомассы на примере елово-пихтовых древостоев Евразии (*Picea* L. и *Abies* Mill., по шесть видов в каждом роду). Анализ выполнен на уровнях дерева и древостоя. Соответственно в расчётах задействованы две сформированные авторами транс-евразийские базы данных о фитомассе: «подеревная» в количестве 1035 определений, в том числе 926 и 109 модельных деревьев соответственно елей и пихт, и «площадная» в количестве 1230 пробных площадей, в том числе 850 – для ельников чистых и с примесью пихты и 380 – для пихтарников чистых и с примесью ели. В качестве методического подхода выбран принцип дисагрегирования (Dong et al., 2015), реализованный по трехшаговой схеме пропорционального взвешивания (3SPW). Решена проблема гармонизации моделей фитомассы как деревьев, так и древостоев, путем соблюдения принципа аддитивности, предполагающего, что суммарная фитомасса фракций (ствол, ветви, хвоя, корни), полученная по «фракционным» уравнениям, должна быть равна значению фитомассы, полученному по общему уравнению. Разработана объединенная бинарной переменной система аддитивных соотношений. Предложенные модели и соответствующие таблицы для оценки фитомассы деревьев и древостоев дают возможность определения в первом приближении фитомассы еловых и пихтовых древостоев (кг и т/га) по данным измерительной таксации на территории Евразии. Поскольку подобные всеобщие модели и таблицы могут иметь смещения в локальных условиях их применения, на следующем этапе исследований предстоит разработать более детальные, региональные модели и таблицы фитомассы путем «разбиения» предложенной здесь всеобщей аддитивной модели на региональные с помощью фиктивных переменных.

V.A. Usoltsev, M.P. Voronov, S.O.R. Shobairi, J.A. Dar, K.V. Kolchin, V.P. Chasovskikh,
E.V. Markovskaya

COMPARATIVE ANALYSIS OF ORDINARY AND ADDITIVE MODELS OF
COMPONENT COMPOSITION OF TREE AND FOREST BIOMASS (ON THE EXAMPLE
OF *PICEA* AND *ABIES* SP.)

Key words: *Picea* sp. and *Abies* sp., equations additivity, biosphere role of forests, biomass of trees and forests, allometric models, sample plots, biological productivity, transcontinental tables of biomass.

For the first time in Russian literature the problem of harmonizing allometric models of tree biomass components (stem, branches, foliage, roots) by means of ensuring the principle of their additivity has been solved. It is implying that the sum of biomass values obtained by component equations should be equal to the value of total biomass received with the total equation. For this purpose the unique tree biomass database in a number of 926 and 109 sample trees, correspondingly for *Picea* sp. and *Abies* sp., growing on the territory of Eurasia is compiled. Additive system of biomass component relations, as a transcontinental three-step model of proportional weighting is designed. On its basis the corresponding taxation tables of the biomass component composition involving two inputs - the stem diameter at breast height and the tree height - are suggested. In contrast to "aggregation" method of designing the additive model according to the principle "from particular - to general", an alternative, "disaggregation" three-step method is applied when using another principle "from general - to particular". The proposed models and corresponding tables for estimating tree and forest biomass make their possible to calculate spruce and fir stand biomass (kg and t/ha) on Eurasian forests as the first approximation when using measuring taxation. Because such transcontinental models and tables may have biases in local conditions for their application, in the next stage of this research more detailed, regional tree biomass additive models and tables will be developed through the "split" the proposed here common model for regional ones using dummy variables.

Усольцев Владимир Андреевич - доктор сельскохозяйственных наук, заслуженный лесовод России, профессор кафедры менеджмента и управления качеством Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета, профессор, главный научный сотрудник Ботанического сада УрО РАН (Екатеринбург). Тел.: (343)254-61-59; e-mail: Usoltsev50@mail.ru.

Usoltsev Vladimir Andreyevich - Doctor of agricultural sciences, professor of the Department of quality management, Ural State Forest Engineering University, chief researcher at the Botanical Garden, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg). Phone: (343)254-61-59; e-mail: Usoltsev50@mail.ru.

Воронов Михаил Петрович - кандидат технических наук, профессор кафедры менеджмента и управления качеством Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета (Екатеринбург). Тел.: (343)375-51-40; e-mail: mstrk@yandex.ru.

Voronov Mikhail Petrovich - PhD, Associate Professor of the Department of Quality Management at the Ural State Forest Engineering University (Yekaterinburg). Phone: (343)375-51-40; e-mail: mstrk@yandex.ru.

Shobairi Omid - PhD, Nanjing Forestry University, Nanjing Shi, Jiangsu Sheng, China, 210037.

Dar Javid Ahmad - PhD, Biodiversity Conservation Lab., Department of Botany, Dr. Hari Singh Gour Central University, Madhya Pradesh, India.

Колчин Кирилл Владимирович – аспирант 2-го года обучения при Уральском государственном лесотехническом университете (Екатеринбург). Тел.: 8-999-567-20-33, e-mail: kirill_-92@mail.ru.

Kolchin Kirill Vladimirovich - Postgraduate of the Ural State Forest Engineering University (Yekaterinburg). Phone: 8-999-567-20-33, e-mail: kirill_-92@mail.ru.

Часовских Виктор Петрович - доктор технических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, член Российской академии инженерных наук им. А.М. Прохорова, член Российской академии естественных наук, Full Member of European Academy of Natural History, директор Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета (Екатеринбург). Тел. (343)261-46-44; e-mail: u2007u@ya.ru.

Chasovskikh Viktor Petrovich - Doctor of technical sciences, Professor, Director of the Institute of Economics and Management, Ural State Forest Engineering University (Yekaterinburg). Phone: (343)261-46-44; e-mail: u2007u@ya.ru.

Марковская Екатерина Владимировна - магистр II курса Уральского государственного лесотехнического университета (г. Екатеринбург). Тел. (343)328-06-11; e-mail: sqwid@mail.ru.

Markovskaya Ekaterina Vladimirovna - Magister of the Ural State Forest Engineering University (Yekaterinburg). Phone: (343)328-06-11; e-mail: sqwid@mail.ru.

При оценке биологической продуктивности лесов применяются регрессионные аллометрические модели фитомассы деревьев (Ter-Mikaelian, Korzukhin, 1997; Усольцев и др., 2017а,б,в) и древостоев (Вейсов, Каплин, 1976; Усольцев, 1985; 1988; Bi et al., 2010). Аллометрия рассматривается, с одной стороны, как одна из математических реализаций фрактальности живой природы (Mandelbrot, 1983; West et al., 1997, 1999; Whitfield, 2001; Enquist, Niklas, 2002; Гелашвили и др., 2013), а с другой – как некоторое приближение к любой нелинейной стохастической (корреляционной, эмпирической) закономерности, которая выражается взаимосвязью некоторой зависимой переменной с одной или несколькими независимыми, в основе которой лежит теория вероятности (Assmann, 1961; Антанайтис, 1976). Компромиссной выглядит позиция Я.Б. Зельдовича и А.Д. Мышкиса (1965), согласно которой регрессионная зависимость тем лучше, чем меньше в ней эмпирического и чем больше в неё вложено теоретического.

При построении и использовании аллометрических моделей обнаруживаются некоторые неопределенности. Одна из них связана с проблемой гармонизации аллометрических моделей фитомассы деревьев и древостоев. Названная гармонизация, в частности, предполагает соблюдение принципа аддитивности, согласно которому суммарная фитомасса фракций (ствол, ветви, хвоя, корни), полученная по «фракционным» уравнениям, должна равняться значению фитомассы, полученному по общему уравнению. Необходимость соблюдения принципа аддитивности в таблицах фитомассы деревьев, составленных по соответствующим уравнениям, отмечалась уже в первых работах, посвященных оценке фитомассы деревьев по их дендрометрическим показателям – диаметру ствола и высоте дерева (Young et al., 1964). Названная проблема широко обсуждается в мировой литературе, и в последние годы наблюдается экспоненциальный рост публикаций по этой теме (см.: Усольцев, 2017). К сожалению, в русскоязычной литературе она полностью игнорируется.

В предыдущей публикации (Усольцев, 2017) была предпринята попытка на конкретных примерах дать краткий исторический экскурс в проблему аддитивных моделей фитомассы. Были показаны неопределенности, разночтения, противоречия, связанные с аддитивными уравнениями фитомассы и во многом обусловленные разными объемами фактических данных, выбором той или иной структуры модели, но главным образом – той или иной процедуры (алгоритма) расчёта системы аддитивных моделей. Первые

попытки осуществить принцип аддитивности были предприняты на примерах линейных моделей фитомассы. Затем последовал переход на нелинейные аддитивные системы уравнений, более корректные, но обладающие гораздо более сложными расчётными алгоритмами по сравнению с линейными. Одна из последних разработок представлена двушаговым нелинейным методом псевдонесвязанных регрессий (nonlinear seemingly unrelated regressions - NSUR) (Parresol, 2001; Dong et al., 2016). Статистическая корректность и соответственно – сложность расчётных алгоритмов по мере их развития последовательно возрастали, потребовался инструментарий современного программного обеспечения (SAS/ETS 9.3; R-statistical package), однако доказательств повышения состоятельности (эффективности) аддитивных моделей по сравнению с изолированными оценками не было предоставлено. Все упомянутые аддитивные системы уравнений реализованы «агрегированным» методом по принципу «от частного (т.е. от «фракционных» уравнений) – к общему».

Китайскими исследователями на примерах лиственниц ольгинской (*Larix olgensis* (A.HENRY) (Tang et al., 2000) и Гмелина (*Larix gmelinii* (Rupr.) Kuzen.) (Dong et al., 2015) разработан и предложен метод, альтернативный изложенному и реализуемый по принципу «от общего – к частному». Он получил известность как трехшаговый метод пропорционального взвешивания (three-step proportional weighting – 3SPW) (Dong et al., 2015). Согласно предложенной структуре «дисагрегированной» (расчленяемой) (disaggregation model) трехшаговой аддитивной системы моделей, оцененная по исходному уравнению общая фитомасса расчленяется на корни и надземную часть в соответствии с их долями в общей фитомассе, представленными соответствующими «фракционными» уравнениями (шаг 1), далее полученная надземная фитомасса расчленяется аналогичным образом на крону и ствол в коре (шаг 2), и, наконец, крона расчленяется на хвою и ветви (шаг 3а), а ствол – на древесину и кору (шаг 3б) (см. рис. 1). Поскольку коэффициенты регрессионных моделей всех трех шагов оцениваются одновременно, это обеспечивает аддитивность фитомассы всех фракций – общей, промежуточных и исходных (Dong et al., 2015).

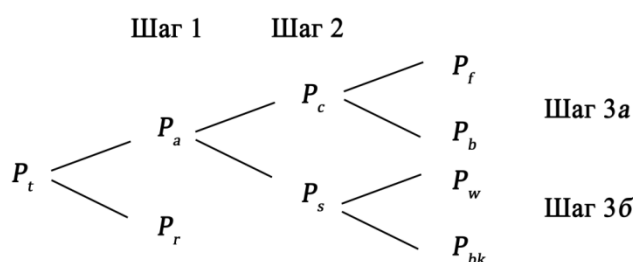


Рис. 1. Блок-схема «дисагрегированной» (расчленяемой) трехшаговой аддитивной модели фитомассы дерева. Обозначения: P_t , P_r , P_a , P_c , P_s , P_f , P_b , P_w и P_{bk} – соответственно фитомасса дерева: общая, подземная (корней), надземная, кроны (хвои и ветвей), ствола (древесины и коры), хвои, ветвей, древесины ствола и коры ствола, кг.

Для каждой из фракций фитомассы: общей P_t , промежуточной 1-го порядка P_a и промежуточных 2-го порядка P_c и P_s (см. рис. 1), а также исходных P_r , P_f , P_b , P_w и P_{bk} – по данным 122 деревьев лиственницы Гмелина были рассчитаны независимые (изолированные) аллометрические двухфакторные модели вида:

$$P_i = a_i D^{b_i} H^{c_i}, \quad (1)$$

где P_i – фитомасса i -й фракции, кг; D – диаметр ствола на высоте груди, см; H – высота дерева, м; a_i , b_i , c_i – регрессионные коэффициенты независимых (изолированных) уравнений (1) для i -й фракции фитомассы. Алгоритм последующих расчётов с целью получения аддитивных значений фракций фитомассы показан в табл. 1 в виде трехшаговой процедуры пропорционального взвешивания.

Сопоставив методы 3SPW и NSUR (соответственно дисагрегированный и агрегированный) по данным 122 деревьев, исследователи пришли к выводу, что хотя полу-

ченные по двум методам результаты близки между собой, первый дает меньшую стандартную ошибку регрессионных коэффициентов по сравнению со вторым. Причину они объясняют тем, что уравнение для общей фитомассы, расчленяемое далее на «фракционные» соотношения по методу 3SPW, всегда имеет более высокие показатели адекватности, чем «фракционные» для массы хвои и ветвей. Поэтому при реализации процедуры в направлении от «фракционных» к общему уравнению по методу NSUR, более высокие ошибки уравнений для массы хвои и ветвей накладываются на уравнения для промежуточных фракций и общей фитомассы. В итоге показатели адекватности уравнений, полученных по методу NSUR, остаются более низкими, чем полученные по методу 3SPW, в том числе при снятии коррелированности фракций и неоднородности дисперсии остатков (Dong et al., 2015).

Таблица 1

Структура трехшаговой аддитивной модели, реализуемой по принципу пропорционального взвешивания по данным 122 деревьев лиственницы Гмелина (Dong et al., 2015). Обозначения здесь и далее см. рис. 1 и уравнение (1).

Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + \frac{a_r D^{b_r} H^{c_r}}{a_a D^{b_a} H^{c_a}}} \times P_t$	$P_r = \frac{1}{1 + \frac{a_r D^{b_r} H^{c_r}}{a_a D^{b_a} H^{c_a}}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + \frac{a_s D^{b_s} H^{c_s}}{a_c D^{b_c} H^{c_c}}} \times P_a$	$P_s = \frac{1}{1 + \frac{a_s D^{b_s} H^{c_s}}{a_c D^{b_c} H^{c_c}}} \times P_a$
Шаг 3а	$P_f = \frac{1}{1 + \frac{a_b D^{b_b} H^{c_b}}{a_f D^{b_f} H^{c_f}}} \times P_c$	$P_b = \frac{1}{1 + \frac{a_b D^{b_b} H^{c_b}}{a_f D^{b_f} H^{c_f}}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + \frac{a_{bk} D^{b_{bk}} H^{c_{bk}}}{a_w D^{b_w} H^{c_w}}} \times P_s$	$P_{bk} = \frac{1}{1 + \frac{a_{bk} D^{b_{bk}} H^{c_{bk}}}{a_w D^{b_w} H^{c_w}}} \times P_s$

Объекты и методы

В упомянутых выше работах в качестве исходных материалов авторами были использованы сводки данных о фитомассе той или иной древесной породы, исчисляемые несколькими десятками деревьев. Для глобального количественного описания биосферных функций лесного покрова необходимы соответствующие базы данных, включающие в себя количественные характеристики мировых лесов, в связи с чем научным сообществом констатируется наступление «эры больших массивов данных» (the Big Data Era: <http://www.gfbinitiative.org/symposium2017>), и на сформированных «больших массивах» выводятся глобальные закономерности по биологической продуктивности лесных фитоценозов и составляющих их деревьев (Crowther et al., 2015; Poorter et al., 2015; Liang et al., 2016; Jucker et al., 2017).

Целью настоящего исследования является сравнительный анализ адекватности традиционных (независимых, изолированных) и аддитивных систем уравнений фитомассы на примере елово-пихтовых древостоев Евразии (*Picea* L. и *Abies* Mill.). Анализ выполнен на уровнях дерева и древостоя. Соответственно в расчётах задействованы две сформированные авторами трансевразийские базы данных о фитомассе: «подеревная» в количестве 1035 определений (Usoltsev, 2016; Усольцев, 2016), в том числе 926 и 109 модельных деревьев соответственно елей и пихт, и «площадная» в количестве 1230 пробных площадей, в том числе 850 – для ельников чистых и с примесью пихты и 380 – для пихтарников чистых и с примесью ели (Usoltsev, 2013).

В качестве методического подхода мы выбрали принцип дисагрегирования, реализованный по трехшаговой схеме пропорционального взвешивания (3SPW), поскольку он: (а) позволяет пошагово (последовательно) расчленить оценки общей фитомассы на промежуточные фракции в соответствии с их долями в общей фитомассе и затем полученные оценки – на исходные фракции в соответствии с их долями в промежуточных фракциях, (б) обеспечивает пошаговую аддитивность фракций всех уровней, (в) дает в итоге модель фитомассы для каждой промежуточной и исходной фракции с возможностью выбора системы аддитивных уравнений любой желаемой степени детализации, (г) не требует наличия одного и того же количества наблюдений для всех фракций фитомассы и (д) не требует наличия и использования дорогого программного обеспечения (SAS/ETS 9.3; R-statistical package), позволяя обходиться инструментарием Excel.

Известно, что при аналитическом описании связи фитомассы деревьев с дендрометрическими показателями имеет место неоднородность дисперсии остатков, и для её устранения обычно применяют два способа: путём линеаризации уравнений логарифмированием переменных и путём процедуры взвешивания или итерационных приближений. Сравнив оба способа по величине стандартных ошибок, Б.Р. Парресол (Parresol, 2001) пришёл к выводу, что более корректной является модель, полученная по второму способу, но при небольших объёмах фактических данных и несущественной внутренней корреляции между фракциями фитомассы может быть предпочтительным первый способ. В последнем случае необходимо введение поправки на логарифмирование как функции стандартной ошибки (Baskerville, 1972), и оно успешно реализуется при расчёте как однофакторных (Zianis, Mencuccini, 2004), так и многофакторных (Carvalho, Parresol, 2003) аллометрических моделей. Поскольку цель нашего исследования – дать сравнительную характеристику независимых и аддитивных аллометрических моделей фитомассы, то, по-видимому, способ устранения неоднородности дисперсии остатков принципиального значения не имеет, поскольку преимущество или недостаток того или иного из способов одинаково сказывается на корректности как независимых, так и аддитивных моделей. С учётом изложенного, расчёт сравниваемых аллометрических моделей фитомассы выполнен методом наименьших квадратов с линеаризацией зависимостей путём логарифмирования и с введением поправки на логарифмирование по Г.Л. Баскервиллю (Baskerville, 1972).

Результаты и обсуждение

1. Независимые и аддитивные уравнения фитомассы на уровне деревьев

На первом этапе исследования рассчитаны независимые (изолированные) аллометрические уравнения вначале для общей фитомассы, затем для надземной (промежуточная фракция 1-го порядка) и корней (для шага 1), далее для промежуточных фракций 2-го порядка - кроны и ствола в коре (для шага 2) и, наконец, для исходных фракций – хвои и ветвей (для шага 3а) и древесины и коры ствола (для шага 3б) согласно принятой их структуре

$$\ln P_i = a_i + b_i (\ln D) + c_i (\ln H) + d_i (\ln D)(\ln H) + e_i X, \quad (2)$$

которая после антилогарифмирования приводится к виду

$$P_i = a_i D^{b_i} H^{c_i} D^{d_i(\ln H)} e^{e_i X}, \quad (3)$$

где X – бинарная переменная, равная 1 для ели и нулю – для пихты. Характеристика полученных уравнений с поправкой на логарифмирование после процедуры антилогарифмирования приведена в табл. 2.

На втором этапе исследований после подстановки регрессионных коэффициентов независимых уравнений из табл. 2 в структуру аддитивной модели, представленную в табл. 3, получили совокупность исходных аддитивных аналитических зависимостей

(табл. 4), а после сокращения дробей – окончательную трансконтинентальную аддитивную модель фракционного состава фитомассы деревьев ели и пихты, рассчитанную по трехшаговой схеме пропорционального взвешивания (табл. 5). Модель действительна в диапазоне фактических данных D от 0,5-0,6 до 68,0 см и H от 1,3-1,4 до 43,0 м.

Таблица 2

Характеристика независимых аллометрических уравнений (3)

Фракция фитомассы	Регрессионные коэффициенты модели				
P_t	0,9447	$D^{1,1140}$	$H^{-0,3315}$	$D^{0,3412}(\ln H)$	$e^{-0,0836 \cdot X}$
Шаг 1					
P_a	0,6918	$D^{1,0310}$	$H^{-0,3093}$	$D^{0,3614}(\ln H)$	$e^{-0,01707 \cdot X}$
P_r	0,2106	$D^{1,5365}$	$H^{-1,0991}$	$D^{0,4229}(\ln H)$	$e^{-0,00221 \cdot X}$
Шаг 2					
P_c	0,8095	$D^{1,6829}$	$H^{-1,4699}$	$D^{0,3288}(\ln H)$	$e^{-0,00061 \cdot X}$
P_s	0,1933	$D^{0,7722}$	$H^{0,3859}$	$D^{0,3380}(\ln H)$	$e^{-0,04992 \cdot X}$
Шаг 3а					
P_f	0,4023	$D^{1,6211}$	$H^{-1,4943}$	$D^{0,3336}(\ln H)$	$e^{0,1220 \cdot X}$
P_b	0,4078	$D^{1,8127}$	$H^{-1,5716}$	$D^{0,3424}(\ln H)$	$e^{-0,1029 \cdot X}$
Шаг 3б					
P_w	0,1825	$D^{0,8500}$	$H^{0,1048}$	$D^{0,3925}(\ln H)$	$e^{0,00802 \cdot X}$
P_{bk}	0,0647	$D^{0,8187}$	$H^{0,0014}$	$D^{0,3309}(\ln H)$	$e^{-0,3485 \cdot X}$

Таблица 3

Структура трехшаговой аддитивной модели, реализуемой по принципу пропорционального взвешивания.

Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + \frac{a_r D^{b_r} H^{c_r} D^{d_r(\ln H)} e^{e_r \cdot X}}{a_a D^{b_a} H^{c_a} D^{d_a(\ln H)} e^{e_a \cdot X}}} \times P_t$
	$P_r = \frac{1}{1 + \frac{a_a D^{b_a} H^{c_a} D^{d_a(\ln H)} e^{e_a \cdot X}}{a_r D^{b_r} H^{c_r} D^{d_r(\ln H)} e^{e_r \cdot X}}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + \frac{a_s D^{b_s} H^{c_s} D^{d_s(\ln H)} e^{e_s \cdot X}}{a_c D^{b_c} H^{c_c} D^{d_c(\ln H)} e^{e_c \cdot X}}} \times P_a$
	$P_s = \frac{1}{1 + \frac{a_c D^{b_c} H^{c_c} D^{d_c(\ln H)} e^{e_c \cdot X}}{a_s D^{b_s} H^{c_s} D^{d_s(\ln H)} e^{e_s \cdot X}}} \times P_a$
Шаг 3а	$P_f = \frac{1}{1 + \frac{a_b D^{b_b} H^{c_b} D^{d_b(\ln H)} e^{e_b \cdot X}}{a_f D^{b_f} H^{c_f} D^{d_f(\ln H)} e^{e_f \cdot X}}} \times P_c$
	$P_b = \frac{1}{1 + \frac{a_f D^{b_f} H^{c_f} D^{d_f(\ln H)} e^{e_f \cdot X}}{a_b D^{b_b} H^{c_b} D^{d_b(\ln H)} e^{e_b \cdot X}}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + \frac{a_{bk} D^{b_{bk}} H^{c_{bk}} D^{d_{bk}(\ln H)} e^{e_{bk} \cdot X}}{a_w D^{b_w} H^{c_w} D^{d_w(\ln H)} e^{e_w \cdot X}}} \times P_s$
	$P_{bk} = \frac{1}{1 + \frac{a_w D^{b_w} H^{c_w} D^{d_w(\ln H)} e^{e_w \cdot X}}{a_{bk} D^{b_{bk}} H^{c_{bk}} D^{d_{bk}(\ln H)} e^{e_{bk} \cdot X}}} \times P_s$

Таблица 4

Совокупность исходных аддитивных аналитических зависимостей фракций фитомассы от диаметра и высоты дерева, рассчитанных по принципу пропорционального взвешивания.

$P_t = 0,9447 D^{1,1140} H^{-0,3315} D^{0,3412} (\ln H) e^{-0,0836 \cdot X}$	
Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + \frac{0,2106 \cdot D^{1,5365} H^{-1,0991} D^{0,4229} (\ln H) e^{-0,00221 \cdot X}}{0,6918 \cdot D^{1,0310} H^{-0,3093} D^{0,3614} (\ln H) e^{-0,01707 \cdot X}}} \times P_t$
	$P_r = \frac{1}{1 + \frac{0,6918 \cdot D^{1,0310} H^{-0,3093} D^{0,3614} (\ln H) e^{-0,01707 \cdot X}}{0,2106 \cdot D^{1,5365} H^{-1,0991} D^{0,4229} (\ln H) e^{-0,00221 \cdot X}}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + \frac{0,1933 \cdot D^{0,7722} H^{0,3859} D^{0,3380} (\ln H) e^{-0,04992 \cdot X}}{0,8095 \cdot D^{1,6829} H^{-1,4699} D^{0,3288} (\ln H) e^{-0,00061 \cdot X}}} \times P_a$
	$P_s = \frac{1}{1 + \frac{0,8095 \cdot D^{1,6829} H^{-1,4699} D^{0,3288} (\ln H) e^{-0,00061 \cdot X}}{0,1933 \cdot D^{0,7722} H^{0,3859} D^{0,3380} (\ln H) e^{-0,04992 \cdot X}}} \times P_a$
Шаг 3а	$P_f = \frac{1}{1 + \frac{0,4078 \cdot D^{1,8127} H^{-1,5716} D^{0,3424} (\ln H) e^{-0,1029 \cdot X}}{0,4023 \cdot D^{1,6211} H^{-1,4943} D^{0,3336} (\ln H) e^{0,1220 \cdot X}}} \times P_c$
	$P_b = \frac{1}{1 + \frac{0,4023 \cdot D^{1,6211} H^{-1,4943} D^{0,3336} (\ln H) e^{0,1220 \cdot X}}{0,4078 \cdot D^{1,8127} H^{-1,5716} D^{0,3424} (\ln H) e^{-0,1029 \cdot X}}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + \frac{0,0647 \cdot D^{0,8187} H^{0,0014} D^{0,3309} (\ln H) e^{-0,3485 \cdot X}}{0,1825 \cdot D^{0,8500} H^{0,1048} D^{0,3925} (\ln H) e^{0,00802 \cdot X}}} \times P_s$
	$P_{bk} = \frac{1}{1 + \frac{0,1825 \cdot D^{0,8500} H^{0,1048} D^{0,3925} (\ln H) e^{0,00802 \cdot X}}{0,0647 \cdot D^{0,8187} H^{0,0014} D^{0,3309} (\ln H) e^{-0,3485 \cdot X}}} \times P_s$

Таким образом, получена аддитивная модель фракционного состава фитомассы деревьев ели и пихты, в которой устранена внутренняя противоречивость «фракционных» и общего уравнения. Поскольку обеспечение аддитивности уравнений фитомассы не обязательно означает повышение точности их оценок (Cunia, Briggs, 1984; Reed, Green, 1985), необходимо далее выяснить, обладает ли полученная аддитивная модель достаточными показателями адекватности и как они соотносятся с показателями адекватности независимых уравнений?

С этой целью по исходным (не логарифмированным) данным фитомассы рассчитаны коэффициенты детерминации R^2 и среднеквадратические ошибки $RMSE$ как независимых, так и аддитивных уравнений, по формулам

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - p}}, \quad (4)$$

где Y_i - фактическое значение; \hat{Y}_i - расчётное значение по модели; \bar{Y} - среднее фактическое значение всех (N) деревьев; $p = 5$ - число переменных; N - общее число деревьев, включённых в расчёт R^2 и $RMSE$.

Таблица 5

Трехшаговая аддитивная модель фракционного состава фитомассы деревьев ели и пихты, реализованная по принципу пропорционального взвешивания

$P_t = 0,9447 D^{1,1140} H^{-0,3315} D^{0,3412 (\ln H)} e^{-0,0836 \cdot X}$	
Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + 0,3044 D^{0,5055} H^{-0,7898} D^{0,0615 (\ln H)} e^{0,0149 \cdot X}} \times P_t$
	$P_r = \frac{1}{1 + 3,2849 D^{-0,5055} H^{0,7898} D^{-0,0615 (\ln H)} e^{-0,0149 \cdot X}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + 0,2388 D^{-0,9107} H^{1,8558} D^{0,0092 (\ln H)} e^{-0,0493 \cdot X}} \times P_a$
	$P_s = \frac{1}{1 + 4,1878 D^{0,9107} H^{-1,8558} D^{-0,0092 (\ln H)} e^{0,0493 \cdot X}} \times P_a$
Шаг 3а	$P_f = \frac{1}{1 + 1,0137 D^{0,1916} H^{-0,0773} D^{0,0088 (\ln H)} e^{-0,2249 \cdot X}} \times P_c$
	$P_b = \frac{1}{1 + 0,9865 D^{-0,1916} H^{0,0773} D^{-0,0088 (\ln H)} e^{0,2249 \cdot X}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + 0,3545 D^{-0,0313} H^{-0,1034} D^{-0,0616 (\ln H)} e^{-0,3565 \cdot X}} \times P_s$
	$P_{bk} = \frac{1}{1 + 2,8207 D^{0,0313} H^{0,1034} D^{0,0616 (\ln H)} e^{0,3565 \cdot X}} \times P_s$

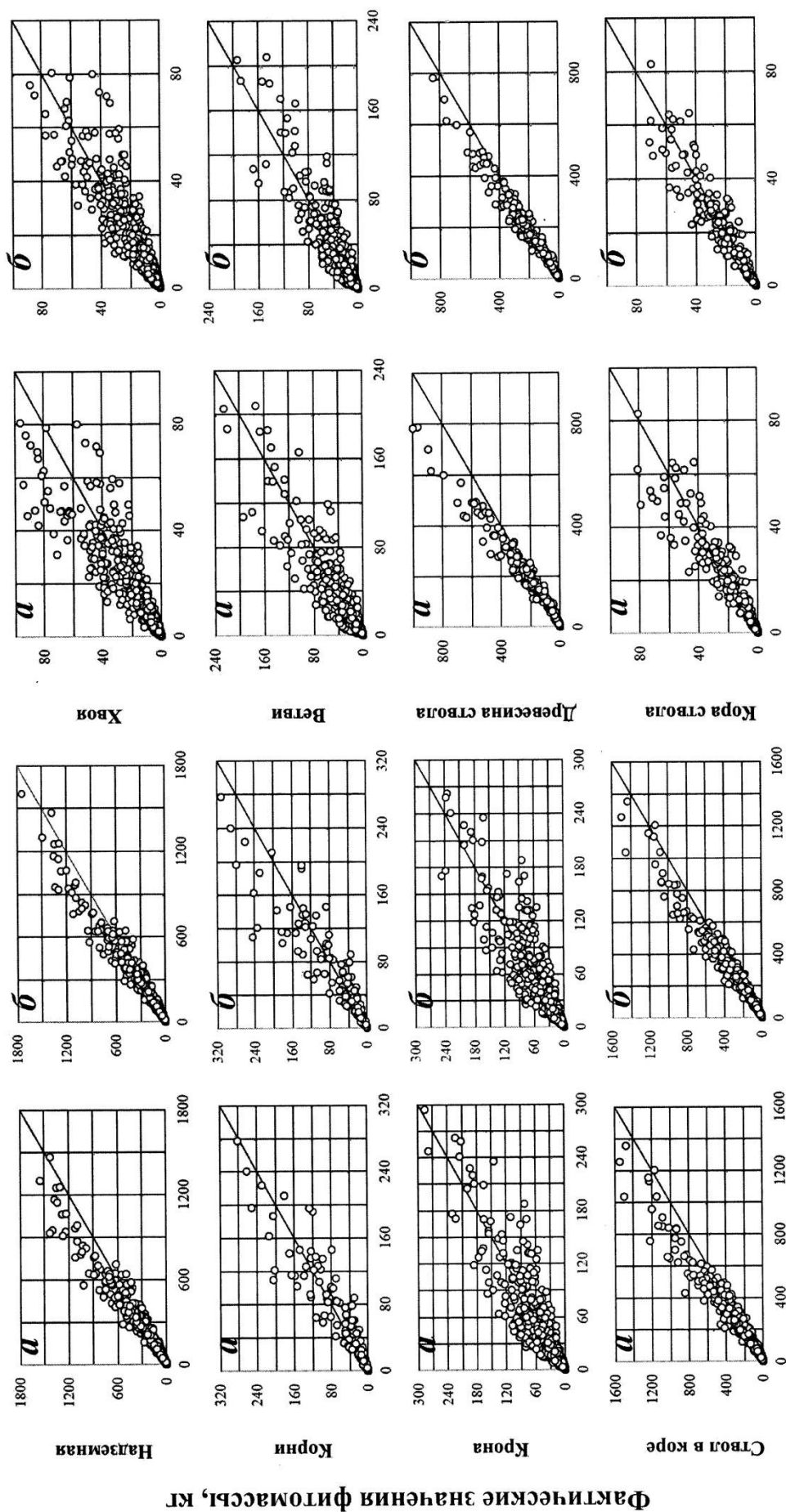
Выше отмечалось, что уравнение для общей фитомассы, расчленяемое на «фракционные» соотношения по методу 3SPW, всегда имеет более высокие показатели адекватности, чем «фракционные» уравнения для массы хвои и ветвей, которые из всех фракций фитомассы обладают обычно наименьшими показателями адекватности. Но это правомерно лишь в случаях, когда фактические данные фитомассы измерены по всем фракциям, мы же обычно оперируем данными, в которых количество измерений массы корней в несколько раз меньше по сравнению с надземными фракциями. Поэтому исходное уравнение для общей фитомассы в процедуре 3SPW рассчитывается по тем исходным данным, которые имеются как для надземных фракций, так и для корней, а это в нашем случае примерно вчетверо меньший массив данных по сравнению с данными по надземной фитомассе.

Для корректного сопоставления адекватности независимых и аддитивных уравнений исходные данные для их расчёта должны быть приведены в сопоставимое состояние, т.е. независимые уравнения для всех фракций фитомассы должны быть рассчитаны по тем же данным, что и аддитивные уравнения для общей фитомассы. Характеристика таких «приведённых» уравнений дана в табл. 6.

Таблица 6

Характеристика «приведённых» независимых аллометрических уравнений (3)

Фракция фитомассы	Регрессионные коэффициенты модели				
P_t	0,9447	$D^{1,1140}$	$H^{-0,3315}$	$D^{0,3412 (\ln H)}$	$e^{-0,0836 \cdot X}$
P_a	0,6918	$D^{1,1670}$	$H^{-0,2400}$	$D^{0,3121 (\ln H)}$	$e^{-0,1504 \cdot X}$
P_r	0,1762	$D^{1,3684}$	$H^{-0,8334}$	$D^{0,4058 (\ln H)}$	$e^{0,0464 \cdot X}$
P_c	0,5430	$D^{1,6539}$	$H^{-0,9421}$	$D^{0,2247 (\ln H)}$	$e^{-0,0560 \cdot X}$
P_s	0,2174	$D^{0,7976}$	$H^{0,4478}$	$D^{0,3195 (\ln H)}$	$e^{-0,2387 \cdot X}$
P_f	0,3877	$D^{1,8213}$	$H^{-1,6663}$	$D^{0,3222 (\ln H)}$	$e^{0,2223 \cdot X}$
P_b	0,1784	$D^{1,7673}$	$H^{-0,8732}$	$D^{0,2359 (\ln H)}$	$e^{-0,0217 \cdot X}$
P_w	0,1825	$D^{0,8500}$	$H^{0,1048}$	$D^{0,3925 (\ln H)}$	$e^{0,0080 \cdot X}$
P_{bk}	0,0647	$D^{0,8187}$	$H^{0,0014}$	$D^{0,3309 (\ln H)}$	$e^{-0,34850 \cdot X}$



Расчетные значения фитомассы, кг

Рис. 2. Соотношение фактических значений и значений, полученных расчётом по независимым (а) и аддитивным (б) моделям фитомассы деревьев.

Показатели адекватности R^2 и RMSE полученных как независимых «приведённых» (табл. 6), так и аддитивных уравнений (табл. 5), рассчитаны по тому же количеству наблюдений, по которому были рассчитаны «фракционные» уравнения (см. табл. 2), пропорциональное взвешивание которых по трёхшаговой схеме дало в итоге аддитивные уравнения, показанные в табл. 5. Результаты сопоставления (табл. 7) свидетельствуют о том, что аддитивные уравнения не только внутренне непротиворечивы, но и обладают более высокими показателями адекватности по сравнению с независимыми уравнениями, за исключением уравнений для массы корней.

Таблица 7

Сравнение показателей адекватности независимых и аддитивных уравнений фитомассы деревьев ели и пихты

Показатели	Фракции фитомассы*								
	P_t	P_a	P_r	P_s	P_w	P_{bk}	P_c	P_b	P_f
Независимые уравнения									
R^2	0,937	0,914	0,884	0,902	0,915	0,893	0,836	0,809	0,746
RMSE	78,37	61,88	17,16	56,94	35,49	4,25	16,66	12,02	7,27
Аддитивные уравнения									
R^2	0,937	0,939	0,831	0,941	0,956	0,920	0,839	0,848	0,839
RMSE	78,37	52,32	20,72	44,15	25,41	3,67	16,51	10,72	5,80

* Обозначения см. рис. 1. Жирным шрифтом выделены фракции, для которых значения R^2 по аддитивным моделям выше, чем по независимым, а значения RMSE соответственно ниже.

Соотношение фактических значений и значений, полученных расчётом по независимым и аддитивным моделям значений фитомассы деревьев (рис. 2), показывает высокую степень коррелированности названных показателей и отсутствие видимых различий в структуре остаточных дисперсий, полученных по двум названным видам моделей.

Путем табулирования аддитивной модели фитомассы деревьев елей и пихт по задаваемым значениям D и H получили искомые таблицы фракционного состава фитомассы деревьев, предназначенные для оценки фитомассы ельников и пихтарников, произрастающих на территории Евразии (табл. 8 и 9).

Таблица 8

Таблица аддитивного фракционного состава фитомассы деревьев (кг абсолютно сухой массы) для оценки фитомассы ельников, произрастающих на территории Евразии

H , м	Фракции фитомассы	Диаметр ствола, см						
		6	10	14	18	22	26	30
6	Общая фитомасса	10,56	25,49	45,55	-	-	-	-
	Корни	1,95	6,03	12,57	-	-	-	-
	Надземная	8,61	19,46	32,98	-	-	-	-
	Крона	3,79	10,77	20,65	-	-	-	-
	Хвоя	1,87	5,04	9,31	-	-	-	-
	Ветви	1,91	5,73	11,34	-	-	-	-
	Ствол в коре	4,82	8,69	12,33	-	-	-	-
	Древесина ствола	4,16	7,56	10,79	-	-	-	-
	Кора ствола	0,67	1,13	1,53	-	-	-	-
10	Общая фитомасса	12,18	32,14	60,91	98,18	-	-	-
	Корни	1,68	5,85	13,20	24,11	-	-	-
	Надземная	10,50	26,29	47,71	74,07	-	-	-
	Крона	2,43	8,47	18,64	32,96	-	-	-

H, м	Фракции фито-массы	Диаметр ствола, см						
		6	10	14	18	22	26	30
	Хвоя	1,22	4,03	8,53	14,65	-	-	-
	Ветви	1,21	4,44	10,11	18,31	-	-	-
	Ствол в коре	8,07	17,82	29,07	41,11	-	-	-
	Древесина ствола	7,05	15,75	25,87	36,75	-	-	-
	Кора ствола	1,01	2,07	3,21	4,36	-	-	-
	Общая фитомасса	13,38	37,45	73,76	122,38	183,34	-	-
14	Корни	1,51	5,68	13,50	25,63	1,28	-	-
	Надземная	11,87	31,77	60,27	96,75	140,72	-	-
	Крона	1,64	6,41	15,31	28,89	47,44	-	-
	Хвоя	0,83	3,08	7,08	12,96	20,78	-	-
	Ветви	0,81	3,33	8,24	15,92	26,65	-	-
	Ствол в коре	10,23	25,36	44,95	67,86	93,28	-	-
	Древесина ствола	9,02	22,62	40,38	61,25	84,51	-	-
	Кора ствола	1,21	2,74	4,58	6,61	8,77	-	-
	Общая фитомасса	-	41,98	85,10	144,27	219,88	312,30	-
18	Корни	-	5,54	13,67	26,70	1,81	70,58	-
	Надземная	-	36,44	71,44	117,56	174,44	241,71	-
	Крона	-	4,96	12,51	24,64	41,96	64,90	-
	Хвоя	-	2,40	5,83	11,14	18,51	28,06	-
	Ветви	-	2,56	6,69	13,50	23,44	36,84	-
	Ствол в коре	-	31,48	58,92	92,92	132,48	176,81	-
	Древесина ствола	-	28,26	53,28	84,43	120,83	161,74	-
	Кора ствола	-	3,21	5,65	8,49	11,65	15,06	-
	Общая фитомасса	-	-	95,39	164,52	254,23	365,22	498,12
22	Корни	-	-	13,77	27,52	2,19	75,24	110,96
	Надземная	-	-	81,63	137,00	206,52	289,99	387,16
	Крона	-	-	10,38	21,07	36,82	58,26	85,93
	Хвоя	-	-	4,86	9,58	16,34	25,33	36,70
	Ветви	-	-	5,52	11,49	20,48	32,93	49,23
	Ствол в коре	-	-	71,25	115,93	169,70	231,72	301,23
	Древесина ствола	-	-	64,74	105,86	155,56	213,06	277,66
	Кора ствола	-	-	6,51	10,06	14,14	18,67	23,57
	Общая фитомасса	-	-	-	183,53	286,87	416,06	572,11
26	Корни	-	-	-	28,18	2,44	79,20	118,09
	Надземная	-	-	-	155,36	237,29	336,86	454,02
	Крона	-	-	-	18,20	32,44	52,23	78,22
	Хвоя	-	-	-	8,31	14,46	22,81	33,56
	Ветви	-	-	-	9,89	17,98	29,42	44,66
	Ствол в коре	-	-	-	137,15	204,84	284,63	375,80
	Древесина ствола	-	-	-	125,75	188,52	262,75	347,78
	Кора ствола	-	-	-	11,40	16,32	21,88	28,01
	Общая фитомасса	-	-	-	-	-	-	-

Таблица 9

Таблица аддитивного фракционного состава фитомассы деревьев (кг абсолютно сухой массы) для оценки фитомассы пихтарников, произрастающих на территории Евразии.

H, м	Фракции фито-массы	Диаметр ствола, см						
		6	10	14	18	22	26	30
6	Общая фитомасса	11,48	27,71	49,52	-	-	-	-
	Корни	2,09	6,48	13,52	-	-	-	-
	Надземная	9,39	21,23	36,00	-	-	-	-
	Крона	4,02	11,49	22,13	-	-	-	-
	Хвоя	1,76	4,74	8,76	-	-	-	-
	Ветви	2,25	6,75	13,36	-	-	-	-
	Ствол в коре	5,37	9,74	13,87	-	-	-	-
	Древесина ствола	4,37	8,03	11,54	-	-	-	-
	Кора ствола	1,00	1,71	2,34	-	-	-	-
10	Общая фитомасса	13,24	34,95	66,22	106,74	-	-	-
	Корни	1,80	6,28	14,18	25,92	-	-	-
	Надземная	11,44	28,66	52,04	80,82	-	-	-
	Крона	2,55	8,93	19,72	34,99	-	-	-
	Хвоя	1,14	3,75	7,94	13,64	-	-	-
	Ветви	1,41	5,18	11,78	21,35	-	-	-
	Ствол в коре	8,89	19,73	32,31	45,84	-	-	-
	Древесина ствола	7,38	16,62	27,45	39,19	-	-	-
	Кора ствола	1,51	3,12	4,86	6,64	-	-	-
14	Общая фитомасса	14,55	40,72	80,20	133,05	199,33	-	-
	Корни	1,62	6,10	14,50	27,54	1,94	-	-
	Надземная	12,93	34,62	65,70	105,51	153,52	-	-
	Крона	1,72	6,71	16,09	30,42	50,07	-	-
	Хвоя	0,77	2,85	6,55	11,99	19,22	-	-
	Ветви	0,94	3,86	9,54	18,44	30,85	-	-
	Ствол в коре	11,21	27,90	49,61	75,09	103,45	-	-
	Древесина ствола	9,42	23,79	42,70	65,06	90,09	-	-
	Кора ствола	1,80	4,11	6,91	10,03	13,36	-	-
18	Общая фитомасса	-	45,64	92,52	156,84	239,06	339,53	-
	Корни	-	5,95	14,67	28,68	2,73	75,86	-
	Надземная	-	39,70	77,85	128,16	190,23	263,67	-
	Крона	-	5,18	13,09	25,83	44,06	68,28	-
	Хвоя	-	2,22	5,37	10,26	17,04	25,82	-
	Ветви	-	2,96	7,72	15,57	27,02	42,45	-
	Ствол в коре	-	34,51	64,76	102,33	146,17	195,39	-
	Древесина ствола	-	29,69	56,24	89,48	128,47	172,45	-
	Кора ствола	-	4,82	8,52	12,85	17,70	22,94	-
22	Общая фитомасса	-	-	103,71	178,87	276,39	397,07	541,55
	Корни	-	-	14,78	29,55	3,28	80,83	119,25
	Надземная	-	-	88,93	149,31	225,15	316,23	422,31
	Крона	-	-	10,83	22,02	38,54	61,07	90,19
	Хвоя	-	-	4,47	8,80	15,00	23,24	33,65
	Ветви	-	-	6,36	13,22	23,54	37,83	56,53
	Ствол в коре	-	-	78,11	127,29	186,61	255,16	332,12

H, м	Фракции фито-массы	Диаметр ствола, см						
		6	10	14	18	22	26	30
	Древесина ствола	-	-	68,30	112,07	165,16	226,78	296,21
	Кора ствола	-	-	9,80	15,22	21,45	28,38	35,91
26	Общая фитомасса	-	-	-	199,54	311,88	452,34	621,99
	Корни	-	-	-	30,25	3,66	85,08	126,88
	Надземная	-	-	-	169,29	258,64	367,26	495,11
	Крона	-	-	-	18,99	33,89	54,61	81,87
	Хвоя	-	-	-	7,63	13,25	20,88	30,70
	Ветви	-	-	-	11,36	20,63	33,73	51,17
	Ствол в коре	-	-	-	150,30	224,75	312,65	413,24
	Древесина ствола	-	-	-	133,06	200,02	279,42	370,60
	Кора ствола	-	-	-	17,24	24,73	33,23	42,64

Сравнительный анализ таблиц 8 и 9 показывает, что в аддитивных уравнениях кодирование ели и пихты бинарной переменной учитывает различие их не только по величине общей, надземной и подземной фитомассы, но и по фракционной структуре. Например, пихта превышает ель по надземной и подземной фитомассе деревьев соответственно на 9 и 7%. У равновеликих деревьев ели и пихты соотношение подземной и надземной фитомассы в общей, а также соотношение масс кроны и ствола в надземной примерно одинаковое (шаг 2), но соотношение масс хвои и ветвей в массе кроны различается и составляет соответственно 44:56 и 38:62 % (шаг 3а), различается также соотношение масс древесины и коры в общей массе ствола: соответственно 90:10 и 87:13 % (шаг 3б). Таким образом, существенное различие ели и пихты имеется в соотношении фитомасс хвои и ветвей, а также древесины и коры ствола, а по соотношению подземной и надземной фитомассы в общей и по соотношению массы кроны и ствола в надземной различий между елями и пихтами нет.

2. Независимые и аддитивные уравнения фитомассы на уровне древостоев

На первом этапе исследования предпринята проверка наличия или отсутствия различий в фитомассе ельников и пихтарников, обладающих одними и теми же таксационными показателями. С этой целью по материалам базы данных рассчитаны «фракционные» модели, включающие основные массообразующие показатели древостоев

$$\ln P_i = a_i + b_i (\ln A) + c_i (\ln A)^2 + d_i (\ln H) + e_i (\ln D) + f_i (\ln N) + g_i X, \quad (5)$$

где P_i – масса i -й фракции, т/га; A – возраст древостоя, лет; H – средняя высота древостоя, м; D – средний диаметр стволов, см; N – густота древостоя, тыс. экз/га; X – бинарная переменная: для ели $X = 1$, для пихты $X = 0$.

Регрессионный анализ структуры уравнения (5) показал, что для семи фракций фитомассы из девяти фактическое значение критерия Стьюдента для регрессионного коэффициента g_i при бинарной переменной X оказалось больше табличного, т.е. для большинства фракций фитомассы различия уравнений (5) для ельников и пихтарников оказались статистически значимыми (табл. 10).

Таблица 10

Соотношение фактических и табличных величин t -критерия Стьюдента, характеризующего значимость регрессионного коэффициента g_i на уровне вероятности $P_{0,95}$

Фракция фитомассы*	P_t	P_a	P_r	P_c	P_s	P_f	P_b	P_w	P_{bk}
Фактическое значение t -критерия	2,72	2,28	4,97	3,43	0,71	2,44	4,28	1,20	7,30
Табличное значение t -критерия на уровне вероятности $P_{0,95}$	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96

* Обозначения: P_t , P_r , P_a , P_c , P_s , P_f , P_b , P_w и P_{bk} – соответственно фитомасса древостоя, т/га: общая, подземная (корней), надземная, кроны (хвои и ветвей), ствола (древесины и коры), хвои, ветвей, древесины ствола и коры ствола, т/га. Жирным шрифтом выделены фракции фитомассы, по которым различия ели и пихты статистически значимы, т.е. $t_{факт} > t_{табл}$.

На этом основании бинарная переменная сохранена в структуре уравнения (5), и на втором этапе расчёты выполнены отдельно для ельников и пихтарников по уравнению (5), которое после антилогарифмирования приведено к виду

$$P_i = a_i A^{bi} A^{ci(\ln A)} H^{di} D^{ei} N^{fi} e^{giX}. \quad (6)$$

Рассчитаны независимые (изолированные) аллометрические уравнения (5) вначале для общей фитомассы, затем для надземной (промежуточная фракция 1-го порядка) и корней (для шага 1), далее для промежуточных фракций 2-го порядка – кроны и ствола в коре (для шага 2) и, наконец, для исходных фракций – хвои и ветвей (для шага 3а) и древесины и коры ствола (для шага 3б) (см. рис. 1) согласно принятой их структуре. Модель действительна в диапазонах фактических данных массообразующих показателей: $A = 7 \div 350$ лет; $D = 0,5 \div 74,0$ см, $H = 1,3 \div 39,0$ м и $N = 0,125 \div 187,0$ тыс. экз/га.

Полученные независимые (изолированные) уравнения приведены к виду (6), и после коррекции на логарифмирование их характеристика дана в табл. 11. На третьем этапе исследования по алгоритму, аналогичному тому, что был применен на уровне деревьев (см. рис. 1 и табл. 1), получена система аддитивных уравнений фитомассы ельников и пихтарников, показанная в табл. 12. После сокращения дробей в табл. 13 приведена окончательная структура трехшаговой аддитивной модели фракционного состава фитомассы еловых и пихтовых древостоев, полученной по принципу пропорционального взвешивания.

Для корректного сопоставления адекватности независимых и аддитивных уравнений исходные данные фитомассы древостоев для расчёта независимых уравнений по аналогии с фитомассой деревьев приведены в сопоставимое состояние, т.е. независимые уравнения рассчитаны по тем же данным, что и аддитивные уравнения для общей фитомассы. Характеристика «приведённых» уравнений дана в табл. 14.

Результаты расчёта коэффициента детерминации R^2 и среднеквадратической ошибки $RMSE$ независимых и аддитивных моделей фитомассы древостоев по исходным (не логарифмированным) данным сведены в табл. 15. Результаты показали, что у семи фракций фитомассы из девяти показатели адекватности выше в аддитивных уравнениях по сравнению с независимыми «приведёнными», а у остальных двух занижение не превышает 0,1-5,0%.

Таблица 11

Характеристика независимых (изолированных) аллометрических уравнений (6)

Фракция фитомассы	Регрессионные коэффициенты модели при независимых переменных						
P_t	0,0711	$A^{0,8887}$	$A^{-0,1122(\ln A)}$	$H^{0,6665}$	$D^{1,3999}$	$N^{0,6546}$	$e^{0,1223 \cdot X}$
Шаг 1							
P_a	0,1480	$A^{0,4798}$	$A^{-0,0676(\ln A)}$	$H^{0,8240}$	$D^{1,2302}$	$N^{0,6622}$	$e^{0,0582 \cdot X}$
P_r	0,0219	$A^{0,4706}$	$A^{-0,0399(\ln A)}$	$H^{0,3347}$	$D^{1,6743}$	$N^{0,7220}$	$e^{0,3077 \cdot X}$
Шаг 2							
P_c	0,8527	$A^{-0,2652}$	$A^{0,0024(\ln A)}$	$H^{0,4258}$	$D^{1,1236}$	$N^{0,5913}$	$e^{0,0999 \cdot X}$
P_s	0,0130	$A^{1,1166}$	$A^{-0,1319(\ln A)}$	$H^{1,0311}$	$D^{1,2598}$	$N^{0,7281}$	$e^{0,0194 \cdot X}$
Шаг 3a							
P_f	0,2004	$A^{0,5611}$	$A^{-0,1062(\ln A)}$	$H^{0,5038}$	$D^{0,7136}$	$N^{0,5118}$	$e^{0,0774 \cdot X}$
P_b	0,2722	$A^{-0,2154}$	$A^{0,0053(\ln A)}$	$H^{0,2925}$	$D^{1,3715}$	$N^{0,6060}$	$e^{0,1332 \cdot X}$
Шаг 3б							
P_w	0,0022	$A^{1,6531}$	$A^{-0,1858(\ln A)}$	$H^{1,3622}$	$D^{1,0527}$	$N^{0,8096}$	$e^{0,0362 \cdot X}$
P_{bk}	0,0056	$A^{0,7964}$	$A^{-0,0633(\ln A)}$	$H^{1,1568}$	$D^{0,7359}$	$N^{0,7524}$	$e^{-0,2321 \cdot X}$

Таблица 12

Совокупность исходных аддитивных уравнений фракций фитомассы ельников и пихтарников, рассчитанных по принципу пропорционального взвешивания

$P_t = 0,0711 A^{0,8887} A^{-0,1122(\ln A)} H^{0,6665} D^{1,3999} N^{0,6546} e^{0,1223 \cdot X}$	
Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + \frac{0,0219 A^{0,4706} A^{-0,0399(\ln A)} H^{0,3347} D^{1,6743} N^{0,7220} e^{0,3077 \cdot X}}{0,1480 A^{0,4798} A^{-0,0676(\ln A)} H^{0,8240} D^{1,2302} N^{0,6622} e^{0,0582 \cdot X}}} \times P_t$
	$P_r = \frac{1}{1 + \frac{0,1480 A^{0,4798} A^{-0,0676(\ln A)} H^{0,8240} D^{1,2302} N^{0,6622} e^{0,0582 \cdot X}}{0,0219 A^{0,4706} A^{-0,0399(\ln A)} H^{0,3347} D^{1,6743} N^{0,7220} e^{0,3077 \cdot X}}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + \frac{0,0130 A^{1,1166} A^{-0,1319(\ln A)} H^{1,0311} D^{1,2598} N^{0,7281} e^{0,0194 \cdot X}}{0,8527 A^{-0,2652} A^{0,0024(\ln A)} H^{0,4258} D^{1,1236} N^{0,5913} e^{0,0999 \cdot X}}} \times P_a$
	$P_s = \frac{1}{1 + \frac{0,8527 A^{-0,2652} A^{0,0024(\ln A)} H^{0,4258} D^{1,1236} N^{0,5913} e^{0,0999 \cdot X}}{0,0130 A^{1,1166} A^{-0,1319(\ln A)} H^{1,0311} D^{1,2598} N^{0,7281} e^{0,0194 \cdot X}}} \times P_a$
Шаг 3a	$P_f = \frac{1}{1 + \frac{0,2722 A^{-0,2154} A^{0,0053(\ln A)} H^{0,2925} D^{1,3715} N^{0,6060} e^{0,1332 \cdot X}}{0,2004 A^{0,5611} A^{-0,1062(\ln A)} H^{0,5038} D^{0,7136} N^{0,5118} e^{0,0774 \cdot X}}} \times P_c$
	$P_b = \frac{1}{1 + \frac{0,2004 A^{0,5611} A^{-0,1062(\ln A)} H^{0,5038} D^{0,7136} N^{0,5118} e^{0,0774 \cdot X}}{0,2722 A^{-0,2154} A^{0,0053(\ln A)} H^{0,2925} D^{1,3715} N^{0,6060} e^{0,1332 \cdot X}}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + \frac{0,0056 A^{0,7964} A^{-0,0633(\ln A)} H^{1,1568} D^{0,7359} N^{0,7524} e^{-0,2321 \cdot X}}{0,0022 A^{1,6531} A^{-0,1858(\ln A)} H^{1,3622} D^{1,0527} N^{0,8096} e^{0,0362 \cdot X}}} \times P_s$
	$P_{bk} = \frac{1}{1 + \frac{0,0022 A^{1,6531} A^{-0,1858(\ln A)} H^{1,3622} D^{1,0527} N^{0,8096} e^{0,0362 \cdot X}}{0,0056 A^{0,7964} A^{-0,0633(\ln A)} H^{1,1568} D^{0,7359} N^{0,7524} e^{-0,2321 \cdot X}}} \times P_s$

Таблица 13

Трехшаговая аддитивная модель фракционного состава фитомассы древостоев ели и пихты, реализованная по принципу пропорционального взвешивания

$P_t = 0,0711A^{0,8887}A^{-0,1122(\ln A)}H^{0,6665}D^{1,3999}N^{0,6546}e^{0,1223 \cdot X}$	
Шаг 1	$P_a = \frac{1}{1 + 0,1480A^{-0,0092}A^{0,0277(\ln A)}H^{-0,4893}D^{0,4441}N^{0,0598}e^{0,2495 \cdot X}} \times P_t$
	$P_r = \frac{1}{1 + 6,7580A^{0,0092}A^{-0,0277(\ln A)}H^{0,4893}D^{-0,4441}N^{-0,0598}e^{-0,2495 \cdot X}} \times P_t$
Шаг 2	$P_c = \frac{1}{1 + 0,0152A^{1,3818}A^{-0,1343(\ln A)}H^{0,6053}D^{0,1362}N^{0,1368}e^{-0,0805 \cdot X}} \times P_a$
	$P_s = \frac{1}{1 + 65,592A^{-1,3818}A^{0,1343(\ln A)}H^{-0,6053}D^{-0,1362}N^{-0,1368}e^{0,0805 \cdot X}} \times P_a$
Шаг 3а	$P_f = \frac{1}{1 + 1,3583A^{-0,7765}A^{0,1115(\ln A)}H^{-0,2113}D^{0,6579}N^{0,0942}e^{0,0558 \cdot X}} \times P_c$
	$P_b = \frac{1}{1 + 0,7362A^{0,7765}A^{-0,1115(\ln A)}H^{0,2113}D^{-0,6579}N^{-0,0942}e^{-0,0558 \cdot X}} \times P_c$
Шаг 3б	$P_w = \frac{1}{1 + 2,5688A^{-0,8567}A^{0,1225(\ln A)}H^{-0,2054}D^{-0,3168}N^{-0,0572}e^{-0,2683 \cdot X}} \times P_s$
	$P_{bk} = \frac{1}{1 + 0,3893A^{0,8567}A^{-0,1225(\ln A)}H^{0,2054}D^{0,3168}N^{0,0572}e^{0,2683 \cdot X}} \times P_s$

Таблица 14

Характеристика «приведённых» независимых аллометрических уравнений (6)

Фракция фитомассы	Регрессионные коэффициенты модели при независимых переменных						
P_t	0,0711	$A^{0,8887}$	$A^{-0,1122(\ln A)}$	$H^{0,6665}$	$D^{1,3999}$	$N^{0,6546}$	$e^{0,1223 \cdot X}$
P_a	0,0557	$A^{1,0046}$	$A^{-0,1293(\ln A)}$	$H^{0,6979}$	$D^{1,3299}$	$N^{0,6257}$	$e^{0,0702 \cdot X}$
P_r	0,0278	$A^{0,4951}$	$A^{-0,0455(\ln A)}$	$H^{0,5157}$	$D^{1,4324}$	$N^{0,6575}$	$e^{0,2594 \cdot X}$
P_c	0,2111	$A^{0,3866}$	$A^{-0,0761(\ln A)}$	$H^{0,3587}$	$D^{1,2335}$	$N^{0,5404}$	$e^{0,1475 \cdot X}$
P_s	0,0056	$A^{1,4953}$	$A^{-0,1746(\ln A)}$	$H^{0,8539}$	$D^{1,4438}$	$N^{0,7312}$	$e^{0,0467 \cdot X}$
P_f	0,0624	$A^{1,0254}$	$A^{-0,1794(\ln A)}$	$H^{0,5433}$	$D^{0,8846}$	$N^{0,4999}$	$e^{0,1361 \cdot X}$
P_b	0,1570	$A^{0,0240}$	$A^{-0,0179(\ln A)}$	$H^{0,2254}$	$D^{1,4355}$	$N^{0,5266}$	$e^{0,1732 \cdot X}$
P_w	0,00039	$A^{2,7151}$	$A^{-0,3090(\ln A)}$	$H^{1,0097}$	$D^{1,1723}$	$N^{0,6777}$	$e^{0,2542 \cdot X}$
P_{bk}	0,00289	$A^{1,1011}$	$A^{-0,1008(\ln A)}$	$H^{1,0209}$	$D^{0,8780}$	$N^{0,7520}$	$e^{-0,1768 \cdot X}$

Таблица 15

Сравнение показателей адекватности независимых и аддитивных уравнений фитомассы еловых и пихтовых древостоев

Показатели	Фракции фитомассы*								
	P_t	P_a	P_r	P_s	P_w	P_{bk}	P_c	P_b	P_f
Независимые уравнения									
R^2	0,826	0,721	0,750	0,680	0,807	0,669	0,429	0,476	0,174
$RMSE$	55,86	52,20	13,03	48,33	34,19	3,92	12,44	8,17	5,61
Аддитивные уравнения									
R^2	0,827	0,724	0,712	0,734	0,806	0,686	0,485	0,495	0,324
$RMSE$	55,81	51,99	13,98	44,10	34,27	3,81	11,82	8,02	5,08

* Обозначения см. рис. 1. Жирным шрифтом выделены фракции, для которых значения R^2 по аддитивным моделям выше, чем по независимым, а значения $RMSE$ соответственно ниже.

Соотношение фактических значений и значений, полученных расчётом по независимым и аддитивным моделям значений фитомассы елово-пихтовых древостоев (рис. 3), показывает высокую степень коррелированности названных показателей и отсутствие видимых различий в структуре остаточных дисперсий, полученных по двум названным видам моделей.

На четвёртом этапе исследования систему аддитивных моделей, представленных в табл. 13, в практических целях необходимо представить в табличной форме. Эта система не может быть использована непосредственно, она работает по принципу «Что будет, если...?», и для представления её в табличной форме необходимо задать значения массоопределяющих показателей A , H , D и N . Это можно осуществить, например, путём совмещения полученной аддитивной модели с возрастными трендами массообразующих показателей H , D и N (Усольцев, 2001).

Известно, что продуктивность любого древостоя определяется по соотношению его возраста и высоты в виде так называемой бонитетной шкалы. Поэтому в качестве базовой нами принята зависимость $H = f(A)$, на которую по рекурсивному принципу накладываются последовательно зависимости $D = f(A, H)$ и затем $N = f(A, H, D)$ (табл. 16). Результаты расчёта названной рекурсивной системы уравнений (16 и 13) представлены в табл. 17. Все регрессионные коэффициенты значимы на уровне вероятности $P_{0,95}$, и уравнения адекватны исходным данным.

Таблица 16

Характеристика рекурсивной системы массообразующих показателей в форме их возрастных трендов

Массообразующие показатели	Регрессионные коэффициенты и независимые переменные					R^2	SE
	a_0	$a_1(\ln A)$	$a_3(\ln H)$	$a_4(\ln D)$	$a_5 X$		
H	-18,1109	8,3472	-	-	1,7222	0,530	5,23
$\ln D$	-0,1985	0,1390	0,9172	-	-0,0544	0,923	0,18
$\ln N$	4,2301	-0,1632	0,3091	-1,4454	0,0852	0,738	0,48

Заключение. Таким образом, впервые в русскоязычной литературе выполнен сравнительный анализ адекватности традиционных независимых и аддитивных систем уравнений фитомассы на примере елово-пихтовых древостоев Евразии (шесть видов *Picea* L. и шесть видов *Abies* Mill.). Анализ выполнен на уровнях дерева и древостоя. Соответственно в расчётах задействованы две сформированные авторами трансевразийские базы данных о фитомассе: «подеревная» в количестве 1035 определений, в том числе 926 и 109 модельных деревьев соответственно елей и пихт, и «площадная» в количестве 1230 пробных площадей, в том числе 850 – для ельников чистых и с примесью пихты и 380 – для пихтарников чистых и с примесью ели. В качестве методического подхода выбран принцип дисагрегирования (Dong et al., 2015), реализованный по трехшаговой схеме пропорционального взвешивания (3SPW). Решена проблема гармонизации моделей фитомассы как деревьев, так и древостоев, путем соблюдения принципа аддитивности, предполагающего, что суммарная фитомасса фракций (ствол, ветви, хвоя, корни), полученная по «фракционным» уравнениям, должна быть равна значению фитомассы, полученному по общему уравнению. Разработана объединенная бинарной переменной система аддитивных соотношений. Предложенные модели и соответствующие таблицы для оценки фитомассы деревьев и древостоев дают возможность определения в первом приближении фитомассы еловых и пихтовых древостоев (кг и т/га) по данным измерительной таксации на территории Евразии. Поскольку ранее было показано (Усольцев и др., 2017а,б), что подобные всеобщие модели и таблицы могут иметь смещения в локальных условиях их применения, на следующем этапе исследований предстоит разработать более детальные, региональные модели и таблицы

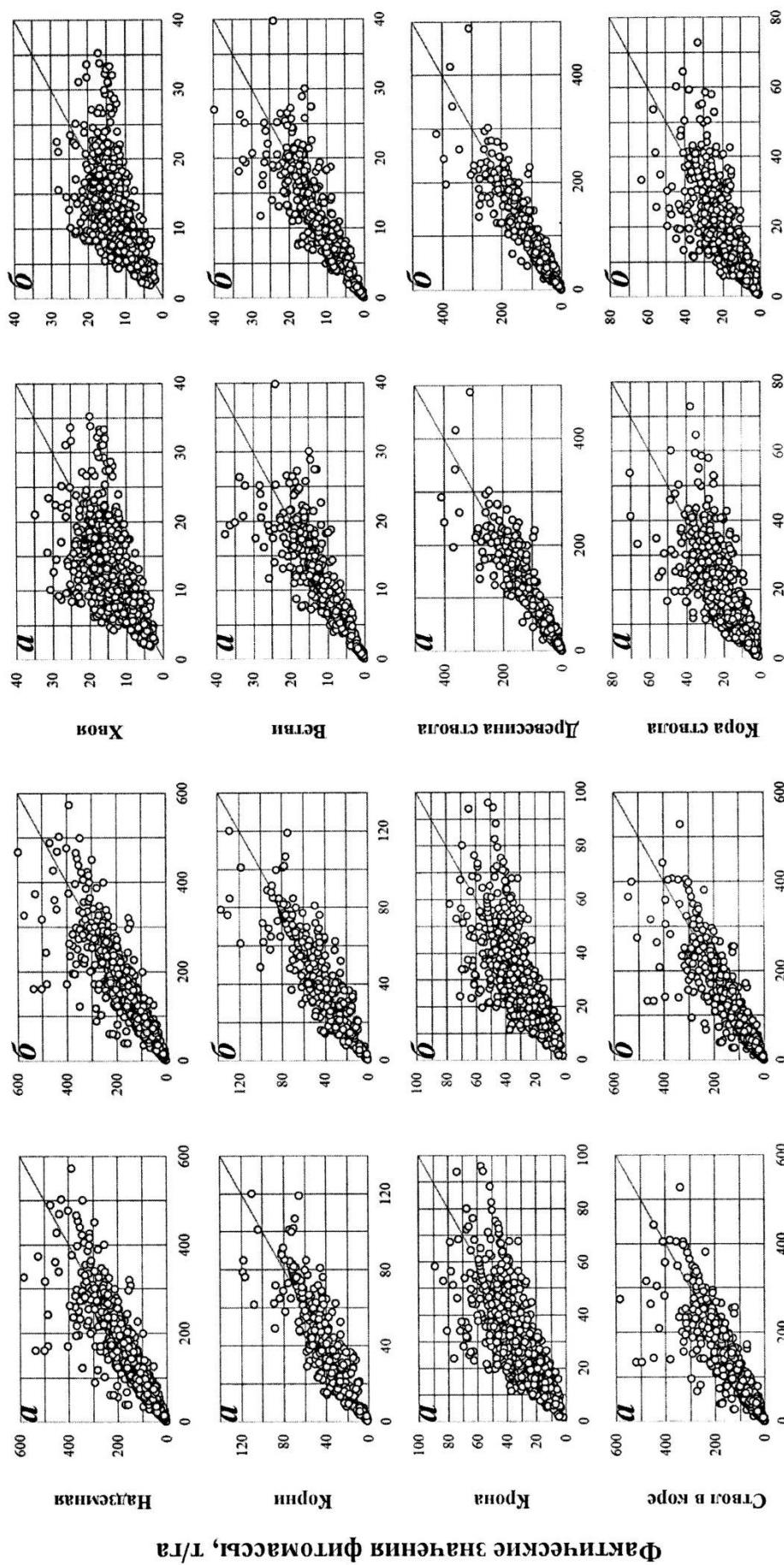


Рис. 3. Соотношение фактических значений и значений, полученных расчётом по независимым (а) и аддитивным (б) моделям фитомассы еловых и пихтовых древостоев.

Таблица 17

Таблица возрастной динамики аддитивного фракционного состава фитомассы ельников и пихтарников (т абсолютно сухой массы на 1 га), произрастающих на территории Евразии

A, лет	H, м	D, см	N, тыс. экз /га	Фитомасса, т/га*								
				Pt	Pa	Pc	Pf	Pb	Pr	Ps	Pw	Pbk
Еловые древостой												
10	2,8	2,8	16,185	17,8	14,3	9,4	6,5	2,9	3,4	4,9	3,9	1,0
20	8,6	8,5	4,055	88,3	71,7	27,8	17,8	10,0	16,6	43,9	38,6	5,2
40	14,4	15,0	1,869	182,6	146,0	37,2	22,3	14,9	36,6	108,8	98,5	10,2
60	17,8	19,2	1,301	236,7	186,6	39,3	22,4	16,9	50,1	147,3	134,2	13,1
80	20,2	22,5	1,030	270,2	210,3	39,7	21,6	18,1	59,9	170,6	155,5	15,0
100	22,1	25,1	0,868	291,8	224,6	39,6	20,7	18,9	67,3	185,0	168,5	16,4
120	23,6	27,4	0,759	306,1	233,1	39,3	19,7	19,5	73,0	193,9	176,3	17,6
140	24,9	29,4	0,680	315,5	238,1	38,8	18,8	20,0	77,4	199,3	180,8	18,5
Пихтовые древостой												
10	1,1	1,2	35,624	4,6	3,8	2,8	1,7	1,1	0,8	0,9	0,6	0,3
20	6,9	7,3	4,319	56,9	47,8	19,3	9,6	9,8	9,1	28,5	23,9	4,6
40	12,7	14,1	1,806	133,0	110,6	28,4	12,7	15,7	22,3	82,2	72,0	10,2
60	16,1	18,5	1,225	178,1	146,6	30,7	12,7	18,0	31,6	115,8	102,3	13,5
80	18,5	21,9	0,957	206,7	168,3	31,5	12,2	19,2	38,4	136,8	121,1	15,8
100	20,3	24,6	0,800	225,5	181,9	31,6	11,6	20,0	43,6	150,3	132,9	17,4
120	21,9	27,0	0,696	238,2	190,5	31,5	11,0	20,6	47,6	159,0	140,3	18,7
140	23,1	29,1	0,621	246,8	195,9	31,3	10,4	20,9	50,9	164,6	144,8	19,8

*Обозначения см. в тексте.

фитомассы путём «разбиения» предложенной здесь всеобщей модели на региональные с помощью фиктивных переменных.

Список использованной литературы

Антанайтис В.В. Введение // Закономерности лесной таксации: Методическое пособие. Каунас: Литовская сельскохозяйственная академия, 1976. С. 5-10.

Вейсов С., Каплин В.Г. К методике определения надземной фитомассы белого саксаула в Восточных Каракумах // Проблемы освоения пустынь. 1976. № 1. С. 60-64.

Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. 616 с.

Поршнев С.В., Овечкина Е.В., Каплан В.Е. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. 166 с.

Усольцев В. А. Моделирование структуры и динамики фитомассы древостоев. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1985. 191 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3353>).

Усольцев В. А. Рост и структура фитомассы древостоев. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988. 253 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3352>).

Усольцев В. А. Фитомасса лесов Северной Евразии: база данных и география. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 708 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3280>).

Усольцев В.А. Фитомасса модельных деревьев лесообразующих пород Евразии: база данных, климатически обусловленная география, таксационные нормативы. Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2016. 336 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/5696>).

Усольцев В.А. Об аддитивных моделях биомассы деревьев: неопределенности и попытка их аналитического обзора // Эко-потенциал. 2017. № 2 (18). С. 23-46 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/6550>).

Усольцев В.А., Субботин К.С., Гаврилин Д.С., Норицина Ю.В. Моделирование распределения ассимилятов в фитомассе деревьев: законы или закономерности? // Эко-Потенциал. 2015. № 1(9). С. 15-32 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/4065>).

Усольцев В.А., Колчин К.В., Маленко А.А. Смещения всеобщих аллометрических моделей при локальной оценке фитомассы деревьев лиственницы // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. 2017а. № 4 (150). С. 85-90 (<http://www.asau.ru/vestnik/2017/4/085-090.pdf>).

Усольцев В.А., Колчин К.В., Воронов М.П. Фиктивные переменные и смещения всеобщих аллометрических моделей при локальной оценке фитомассы деревьев (на примере *Picea* L.) // Эко-потенциал. 2017б. № 1 (17). С. 22-39 (<http://elar.usfeu.ru/bitstream/123456789/6502/1/eko-17-02.pdf>).

Усольцев В.А., Колчин К.В., Азаренок В.А. О возможностях применения всеобщих и региональных аллометрических моделей при оценке фитомассы деревьев ели // Аграрный вестник Урала. 2017в. № 06 (160). С. 33-37 (<http://avu.usaca.ru/ru/issues/109/articles>).

Assmann E. Waldertragskunde: Organische Produktion, Struktur, Zuwachs und Ertrag von Waldbeständen. München, Bonn, Wien: BLV Verlagsgesellschaft, 1961. 492 S.

Baskerville G.L. Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass // Canadian Journal of Forest Research. 1972. Vol. 2. P. 49-53.

Bi H., Long Y., Turner J., Lei Y., Snowdon P., Li Y., Harper R., Zerihun A., Ximenes F. Additive prediction of aboveground biomass for *Pinus radiata* (D. Don) plantations // Forest Ecology and Management. 2010. Vol. 259. P. 2301-2314.

Carvalho J.P., Parresol B.R. Additivity in tree biomass components of Pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.) // Forest Ecology and Management. 2003. Vol. 179. P. 269-276.

Crowther T.W., Glick H.B., Covey K.R., Bettigole C., Maynard D.S., Thomas S.M., Smith J.R., Hintler G., Duguid M.C., Amatulli G., Tuanmu M.-N., Jetz W., Salas C., Stam C., Piotta D., Tavani R., Green S., Bruce G., Williams S.J., Wiser S.K., Huber M.O., Hengeveld G.M., Nabuurs G.-J., Tikhonova E., Borchardt P., Li C.-F., Powrie L.W., Fischer M., Hemp A., Homeier J., Cho P., Vibrans A.C., Umunay P.M., Piao S.L., Rowe C.W., Ashton M.S., Crane P.R., Bradford M.A. Mapping tree density at a global scale // *Nature*. 2015. Vol. 525. P. 201–205 (DOI: 10.1038/nature14967).

Cunia T., Briggs R.D. Forcing additivity of biomass tables: some empirical results // *Canadian Journal of Forest Research*. 1984. Vol. 14. P. 376–384.

Dong L., Zhang L., Li F. A three-step proportional weighting system of nonlinear biomass equations // *Forest Science*. 2015. Vol. 61. No. 1. P. 35–45 (<https://doi.org/10.5849/forsci.13-193>).

Dong L., Zhang L., Li F. Developing two additive biomass equations for three coniferous plantation species in Northeast China // *Forests*. 2016. Vol. 7. No. 7. P. 136 (DOI:10.3390/f7070136).

Enquist B.J., Niklas K.J. Global allocation rules for patterns of biomass partitioning in seed plants // *Science*. 2002. Vol. 295. P. 1517–1520.

Jucker T., Caspersen J., Chave J., Antin C., Barbier N., Bongers F., Dalponte M., van Ewijk K. Y., Forrester D. I., Heani M., Higgins S. I., Holdaway R. J., Iida Y., Lorimer C., Marshall P. M., Momo S., Moncrieff G. R., Ploton P., Poorter L., Rahman K. A., Schlund M., Sonké B., Sterck F. J., Trugman A. T., Usoltsev V. A., Vanderwel M. C., Waldner P., Wedeux B., Wirth C., Wöll H., Woods M., Xiang W., Zimmermann N., Coomes D. A. Allometric equations for integrating remote sensing imagery into forest monitoring programmes // *Global Change Biology*. 2017. Vol. 23. P. 177–190 (DOI: 10.1111/gcb.13388).

Liang J., Crowther T.W., Picard N., Wiser S., Zhou M., Alberti G., Schulze E.-D., McGuire A.D., Bozzato F., Pretzsch H., de-Miguel S., Paquette A., Hérault B., Scherer-Lorenzen M., Barrett C. B., Glick H. B., Hengeveld G. M., Nabuurs G.-J., Pfautsch S., Viana H., Vibrans A. C., Ammer C., Schall P., Verbyla D., Tchebakova N. M., Fischer M., Watson J. V., Chen H. Y. H., Lei X., Schelhaas M.-J., Lu H., Gianelle D., Parfenova E. I., Salas C., Lee E., Lee B., Kim H. S., Bruelheide H., Coomes D. A., Piotta D., Sunderland T., Schmid B., Gourlet-Fleury S., Sonké B., Tavani R., Zhu J., Brandl S., Vayreda J., Kitahara F., Searle E. B., Neldner V. J., Ngugi M. R., Baraloto C., Frizzera L., Balazy R., Oleksyn J., Zawila-Niedzwiecki T., Bouriaud O., Bussotti F., Finér L., Jaroszewicz B., Jucker T., Valladares F., Jagodzinski A. M., Peri P. L., Gonmadje C., Marthy W., O'Brien T., Martin E. H., Marshall A. R., Rovero F., Bitariho R., Niklaus P. A., Alvarez-Loayza P., Chamuya N., Valencia R., Mortier F., Wortel V., Engone-Obiang N. L., Ferreira L. V., Odeke D. E., Vasquez R. M., Lewis S. L., Reich P.B. Positive biodiversity-productivity relationship predominant in global forests // *Science*. 2016. Vol. 354. Issue 6309. P. 196–208. (DOI: 10.1126/science.aaf8957).

Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. New York: W.N. Freeman, 1983. 468 p.

Parresol B. R. Additivity of nonlinear biomass equations // *Canadian Journal of Forest Research*. 2001. Vol. 31. No. 5. P. 865–878 (<https://doi.org/10.1139/x00-202>).

Poorter H., Jagodzinski A. M., Ruiz-Peinado R., Kuyah S., Luo Y., Oleksyn J., Usoltsev V. A., Buckley T. N., Reich P. B., Sack L. How does biomass allocation change with size and differ among species? An analysis for 1200 plant species from five continents // *New Phytologist*. 2015. Vol. 208. Issue 3. P. 736–749 (DOI:10.1111/nph.13571).

Reed D.D., Green E.J. A method of forcing additivity of biomass tables when using nonlinear models // *Canadian Journal of Forest Research*. 1985. Vol. 15. P. 1184–1187.

Tang S., Zhang H., Xu H. Study on establish and estimate method of compatible biomass model // *Scientia Silvae Sinica*. 2000. Vol. 36. P. 19–27 (in Chinese with English abstract).

Ter-Mikaelian M.T., Korzukhin M.D. Biomass equations for sixty-five North American tree species // *Forest Ecology and Management*. 1997. Vol. 97. P. 1-24.

Usoltsev V.A. Forest biomass and primary production database for Eurasia. CD-version. The second edition, enlarged and re-harmonized. - Yekaterinburg: Ural State Forest Engineering University, 2013 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3059>).

Usoltsev V.A. Single-tree biomass data for remote sensing and ground measuring of Eurasian forests. CD-version in English and Russian. Yekaterinburg: Ural State Forest Engineering University. 2016. ISBN 978-5-94984-600-1 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/6103>).

West G.B., Brown J.H., Enquist B.J. A general model for the origin of allometric scaling laws in biology // *Science*. 1997. Vol. 276. P. 122-126.

West G.B., Brown J.H., Enquist B.J. A general model for the structure and allometry of plant vascular system // *Nature*. 1999. Vol. 400. P. 664-667.

Whitfield J. All creatures great and small // *Nature*. 2001. Vol. 413. P. 342-344.

Wirth C., Schumacher J., Schulze E.-D. Generic biomass functions for Norway spruce in Central Europe – a meta-analysis approach toward prediction and uncertainty estimation // *Tree Physiology*. 2004. Vol. 24. P. 121-139.

Young H.E., Strand L., Altenberger R. Preliminary fresh and dry weight tables for seven tree species in Maine. Maine Agricultural Experiment Station, Technical Bulletin 12. 1964. 76 p.

Zianis D., Mencuccini M. On simplifying allometric analyses of forest biomass // *Forest Ecol. Management*. 2004. Vol. 187. P. 311-332.

Рецензент статьи: доктор сельскохозяйственных наук, профессор. Проректор по научной работе Уральского государственного лесотехнического университета С.В. Залесов.